

# ノイズのある量子コンピュータ上での量子振幅推定

宇野 隼平<sup>i</sup>

## Amplitude Estimation Algorithm on Noisy Quantum Device

Shumpei UNO

近年、高速計算が可能な次世代のコンピュータの候補として、量子コンピュータに大きな注目が集まっている。本稿では、数値積分 (モンテカルロ積分) 等に応用可能な、基礎的な量子アルゴリズムである量子振幅推定法のノイズ状況下 (Depolarizing noise) における性能について議論する。

(キーワード): 量子コンピュータ, 量子アルゴリズム, 量子振幅推定, Depolarizing noise

### 1 はじめに

量子コンピュータは既存のコンピュータの限界を超える可能性を秘めた計算機モデルであり、これまで精力的・継続的に研究が進められてきた。特に量子振幅推定アルゴリズム (以下, QAE という) [1–6] は数値積分 [7–14], 機械学習 [15–21] など, 幅広い応用分野を持つ基礎アルゴリズムとして注目を集めている。

これまで研究されている量子アルゴリズムの多くは, ノイズの無い, 理想的な量子コンピュータ上で動作するアルゴリズムであり, 近い将来のエラー訂正の無い量子コンピュータ上での性能は明確では無い。ノイズ状況下におけるアルゴリズムの性能評価は, 量子コンピュータが共用され始めた近年の状況を鑑みると, 今後も重要な研究課題の一つであると考えられる。

本稿では, ノイズ状況下における QAE の性能についての筆者らの最近の研究 [22] を紹介する。特に, この研究の背景にある, Quantum Metrology の分野でのノイズの取り扱いの紹介から始める [23–32]。Quantum Metrology における代表的な問題として, 量子状態の操作に埋め込まれたパラメータを推定する問題が挙げられる [33, 34]。一般に, 量子状態 (Probe) を独立に  $N$  個用意し, それぞれの Probe に対して独立に操作した上で測定を行うと, 中心極限定理により, パラメータの推定誤差 (二乗平均平方根誤差) は, 漸近的に,  $1/\sqrt{N}$  程度 (Standard Quantum Limit, SQL または単に shot noise と呼ばれる) のス

ケーリングに従う。一方で, Quantum Metrology では, エンタングルした  $N$  個の Probe を用意する, または 1 つの Probe に対して  $N$  回の操作を行う等の方法を用いることで, (ノイズがない場合には)  $1/N$  程度の誤差 (Heisenberg Limit, HL と呼ばれる) となることが知られている。これは, QAE アルゴリズム [1–6] と類似した状況 (QAE では, 何もしなければ推定誤差は演算子の呼び出し回数  $N$  に対して, 推定誤差は  $1/\sqrt{N}$  に対して, 振幅増幅を利用することで,  $1/N$  程度の誤差) であり, 何らかの関連性が感じられる。

本稿では Quantum Metrology と QAE アルゴリズムの類似性を利用し, ノイズ環境下での QAE の推定精度を評価することを目的とする。本稿の構成は以下のとおりである。まず, 2 節において, 背景知識として, Quantum Metrology, 特に QAE に関連する Quantum Frequency Estimation [33] のノイズ状況下での代表的な結果について述べる。次に, 実機上でのノイズがほぼ Depolarizing noise でモデル化出来ること [35] を鑑みて, 3 節において, QAE の Depolarizing noise 状況下での性能について述べる。

### 2 Preliminaries on Quantum Metrology

本節では, Quantum Metrology の基礎的な事項について簡単にまとめる。まず, 2.1 節において, パラメータを有する確率モデルの (古典) パラメータ推定について述べる。次に量子状態がパラメトライズされている場合に, パラメータを推定を行う量子状態推定理論について 2.2 節において述べる。次に, 2.3 節において, チャンネル推定理論について述べ, 純粋状

<sup>i</sup>サイエンスソリューション部 上席主任コンサルタント 博士 (理学)

態において、推定精度が HL を達成するエンタングルを利用した方法を紹介する。その後、2.4 節において、エンタングルを利用した方法と、純粋状態においては同等の性能を示す別の方法 (Coherence を利用した Sequential Strategy) を紹介し、最後に、2.5 節において、Sequential Strategy の Depolarizing noise 下での推定精度について紹介する。

なお、本節では、Quantum Metrology で研究されている成果のうち、主に、QAE で重要となると思われる帰結についてのみを述べる。より詳細な理論や実験との関連性については、Metrology に関する Review(例えば、[36–40] 等) を参照。また、本稿では、簡単のため、推定するパラメータが 1 つの場合についてのみ述べる。多パラメータの量子推定に関する研究(例えば [41–43]) は、本稿のスコープの対象外とする。

## 2.1 Classical Estimation Theory

実数  $\mathbb{R}$  に値を取る確率変数  $X$  が、未知のパラメータ  $\theta$  を含む確率モデル(確率密度関数)  $f_\theta(x)$  に従うとする。この確率変数に対して、 $N$  回の独立な試行を行い、 $N$  個の測定結果  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  が得られたとしたときに、 $\theta$  を推定する問題を考える。これらの測定結果から構成される  $\theta$  の推定量  $\hat{\theta}(\vec{x})$  が不偏性条件

$$\begin{aligned} \theta &= \mathbb{E}_X(\hat{\theta}) \\ &= \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \cdots f_\theta(x_N) \hat{\theta}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

を満たし、かつ確率モデルが正則である場合には、分散  $\mathbb{V}(\hat{\theta})$  は、以下の Cramér–Rao 不等式を満たすことが知られている。

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{NF_{\text{cl}}(f_\theta)}. \quad (2.2)$$

ここで、 $F_{\text{cl}}(f_\theta)$  は、以下で定義されるフィッシャー情報量である。

$$\begin{aligned} F_{\text{cl}}(f_\theta) &= \int_x dx \frac{1}{f_\theta(x)} \left( \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \mathbb{E}_X \left[ \left( \frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、 $\mathbb{E}_X$  は確率モデル  $f_\theta(x)$  の下での  $x$  に関する期待値を表す。

一般に、式 (2.2) の Cramér–Rao 不等式の下限値を達成する不偏推定量を構成出来る保証は無い。し

かし、Cramér–Rao 不等式の下限は、最尤推定法により、漸近的 ( $N \rightarrow \infty$ ) に到達可能であることが知られている [44]。最尤推定法は、実現値  $x_1, x_2, \dots, x_N$  を用いて、以下により推定値  $\theta_{\text{ML}}$  を求める方法である。

$$\theta_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_N) = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^N f_\theta(x_i) \quad (2.4)$$

以下では、ここで導入した古典推定理論の量子への拡張について簡単に紹介する。

## 2.2 Quantum State Estimation Theory

推定理論の量子への単純な拡張として、確率モデル  $f_\theta(x)$  の代わりに、密度演算子  $\rho_\theta$  が単一パラメータ  $\theta$  によって特徴づけられている状況を考える。このとき、 $\rho_\theta$  を  $N$  個の独立に用意した量子状態に対して、任意の POVM 測定を行い測定結果  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  が得られた時、 $\theta$  の不偏推定量  $\hat{\theta}$  に対して、以下の量子 Cramér–Rao 不等式が成り立つことが知られている [45–47]。

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{NF_Q(\rho_\theta)}. \quad (2.5)$$

ここで、 $F_Q(\rho_\theta)$  は以下で定義される量子フィッシャー情報量である。

$$F_Q(\rho_\theta) = \text{tr}(\rho_\theta L_S(\rho_\theta)^2). \quad (2.6)$$

ここで、 $L_S(\rho_\theta)$  は Symmetric Logarithmic Derivative(SLD) と呼ばれており、以下を満たすエルミート演算子として定められる<sup>ii</sup>。

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{1}{2}(\rho_\theta L_S(\rho_\theta) + L_S(\rho_\theta) \rho_\theta) \quad (2.7)$$

ここで、overdot は、パラメータ  $\theta$  に関する微分を表す。一般に、量子 Cramér–Rao の不等式の下限を漸近的に達成するような adaptive な測定戦略が存在することが存在することが知られており [49]、式 (2.5) のバウンドは、最適な POVM 測定を選んだ場合には達成することが出来る。ここで、 $F_Q(\rho_\theta)$  は、 $N$  とは無関係であるため、式 (2.5) から、明らかに、推定誤差は  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  に従い、最適な POVM 測定を行ったとしても、HL のスケーリングを達成することは出来ない [23]。

<sup>ii</sup> SLD 以外を用いた量子フィッシャー情報量の定義もあるが、1 パラメータ推定の場合には、SLD が最もタイトなバウンドを与えることが知られている [46, 48]

量子状態が純粋状態として、 $\rho_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$  と表される場合には、量子フィッシャー情報量の表式 (2.6) は以下のように簡単化される。

$$F_Q(|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|) = 4 \left( \left| \langle \dot{\psi}_\theta | \dot{\psi}_\theta \rangle - \left| \langle \dot{\psi}_\theta | \psi_\theta \rangle \right|^2 \right) \right) \quad (2.8)$$

一方で、混合状態の場合には、一般的には、SLD( $L_S(\rho_\theta)$ ) 及び量子フィッシャー情報量 ( $F_Q(\rho_\theta)$ ) は、 $\rho_\theta$  の固有値を  $p_i$  及び固有ベクトルを  $\{|i(\theta)\rangle\}$  と書くとする、

$$\begin{aligned} L_S(\rho_\theta) &= \sum_{\{i|p_i \neq 0\}} \frac{\dot{p}_i(\theta)}{p_i(\theta)} |i(\theta)\rangle\langle i(\theta)| \\ &+ \sum_{\{i,j|p_i+p_j \neq 0\}} \frac{2(p_i - p_j)}{p_i + p_j} |i(\theta)\rangle\langle i(\theta)| \dot{j}(\theta)\rangle\langle j(\theta)| \\ F_Q(\rho_\theta) &= \sum_{\{i|p_i \neq 0\}} \frac{\dot{p}_i(\theta)^2}{p_i(\theta)} \\ &+ \sum_{\{i,j|p_i+p_j \neq 0\}} \frac{2(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle i(\theta) | \dot{j}(\theta) \rangle| \end{aligned} \quad (2.9)$$

と表すことが出来る [36]. 式 (2.9) を用いて量子フィッシャー情報量を計算するためには  $\rho_\theta$  の固有値分解が必要となり、現実的には計算を実行するのが困難なことが多い。このため、多くの場合には、量子フィッシャー情報量の計算に式 (2.9) は用いられず、別の定式化 (例えば purification-base) を使って計算されることも多い [24, 50].

ここで、量子フィッシャー情報量の特に重要な性質を3点紹介する [51]. 1点目は単調性 (Monotonicity) である。量子フィッシャー情報量はパラメータ  $\theta$  と独立な任意の CPTP 写像  $\Lambda$  に対して、以下の関係式を満たす。

$$F_Q(\rho_\theta) \geq F_Q(\Lambda(\rho_\theta)) \quad (2.10)$$

これは推定するパラメータに無関係なノイズにより、情報は増加しないことを示している。2点目は、凸性 (Convexity) である。密度演算子  $\rho, \rho_0, \rho_1$  に対して、 $\rho = p\rho_0 + (1-p)\rho_1$ , ( $p \in [0, 1]$ ) が成り立つとき、量子フィッシャー情報量は以下の関係式を満たす。

$$F_Q(\rho) \leq pF_Q(\rho_0) + (1-p)F_Q(\rho_1). \quad (2.11)$$

最後の性質は加法性 (Additivity) である。量子状態が2つの密度演算子  $\rho$  及び  $\sigma$  の直積状態で書けると

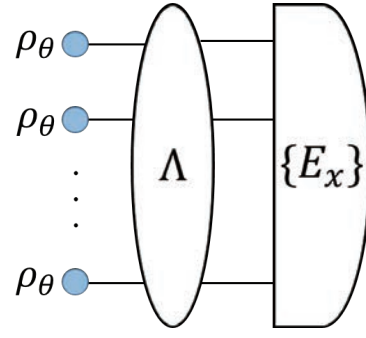


図1 Quantum State Estimation の設定のイメージ。ここで  $\Lambda$  は任意の TPCP 写像、 $\{E_x\}$  は任意の POVM 演算子を表す。

ときには、量子フィッシャー情報量は以下の関係式を満たす。

$$F_Q(\rho \otimes \sigma) = F_Q(\rho) + F_Q(\sigma). \quad (2.12)$$

Monotonicity 及び Additivity から、パラメータが埋め込まれている状態を複数用意し、任意の戦略をとったとしても (図1参照)、量子 Cramér-Rao 不等式 (2.5) を用いると、推定誤差は SQL に従い、HL を達成することは出来ないことがわかる。以下では、Quantum Metrology が対象とするように、TPCP 写像 (チャンネル, 操作) にパラメータが埋め込まれている場合を考え、この場合には HL を達成する可能性があることを見る。

### 2.3 Quantum Channel Estimation Theory

ここでは、問題設定として、パラメータ  $\theta$  が TPCP 写像  $\Lambda_\theta$  により特徴づけられている場合に、 $\theta$  を推定する問題を考える (図2)。以下、状況に応じて、TPCP 写像  $\Lambda_\theta$  を、状況に応じて、チャンネルと呼ぶ。チャンネルへの入力状態を  $\rho_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$  とすると、 $\theta$  の推定精度は、量子フィッシャー情報量  $F_Q(\Lambda_\theta(\rho_{in}))$  を用いて、量子 Cramér-Rao 不等式 (2.5) によりバウンドされる。量子状態に対して、単一のチャンネルを作用させるとした時、チャンネルフィッシャー情報量は、チャンネルに対して最適な入力状態及び POVM 測定を選んだものとして、以下のように定義される。

$$F(\Lambda_\theta) = \max_{|\psi_{in}\rangle} F_Q(\Lambda_\theta(|\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|)) \quad (2.13)$$

ここで、量子フィッシャー情報量の凸性 (式 (2.11)) により、入力状態としては純粋状態のみを考えれば良い。

次に、 $N$  個の TPCP 写像  $\Lambda_\theta$  を、並列に、独立に掛けられるような状況を考える。この  $N$  個の



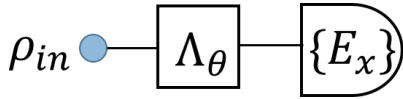


図2 単一チャンネル推定の設定のイメージ。推定するパラメータ  $\theta$  は TPCP 写像  $\Lambda_\theta$  に埋め込まれている。

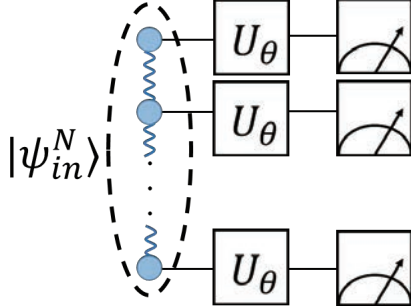


図3  $N$  チャンネル推定の設定のイメージ

TPCP 写像に対する入力状態を  $|\psi_{in}^N\rangle$ ，出力状態を  $\rho_\theta^N = \Lambda_\theta^{\otimes N} (|\psi_{in}^N\rangle\langle\psi_{in}^N|)$  とすると (図3)， $N$  チャンネル量子フィッシャー情報量は以下で定義される。

$$\mathcal{F}(\Lambda_\theta^{\otimes N}) = \max_{|\psi_{in}^N\rangle} F_Q(\Lambda_\theta^{\otimes N} (|\psi_{in}^N\rangle\langle\psi_{in}^N|)) \quad (2.14)$$

このチャンネルフィッシャー情報量が， $N^2$  に比例する時に HL， $N$  に比例するときには SQL となる。例えば，入力状態として， $N$  個の独立な状態  $|\psi_{in}^N\rangle = |\psi_{in}\rangle^{\otimes N}$  を考えた場合には，式 (2.14) は  $\mathcal{F}(\Lambda_\theta^{\otimes N}) = N\mathcal{F}(\Lambda_\theta)$  と SQL となるため，以上の問題設定において HL を達成するためには，何らかの方法でエンタングルを利用する必要があることがわかる。

例えば  $\Lambda_\theta$  としてユニタリ演算子  $U_\theta = \exp(i\theta H)$  を考えることとする (Quantum Frequency Estimation Problem)。ここで， $H$  は既知の有効ハミルトニアンであるとする。この時，有効ハミルトニアンの固有値  $\lambda_0, \lambda_1$  に対応する固有状態  $|\lambda_0\rangle, |\lambda_1\rangle$  を用いて

$$|\psi_{in}^N\rangle = \frac{|\lambda_0\rangle^{\otimes N} + |\lambda_1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

を入力状態とすることで，量子フィッシャー情報量は

$$F_Q(|\psi^N\rangle\langle\psi^N|) = N^2(\lambda_1 - \lambda_0)^2 \quad (2.16)$$

となり，HL を達成することが可能となる。特に，この問題設定においては， $|\lambda_0\rangle, |\lambda_1\rangle$  の代わりに，最大固有値と最小固有値に対応する固有状態  $|\lambda_{max}\rangle, |\lambda_{min}\rangle$  を使うことで，式 (2.16) は，チャンネルフィッシャー情報量となる (量子フィッシャー情報量が最大値をとる) ことも知られている [26]。

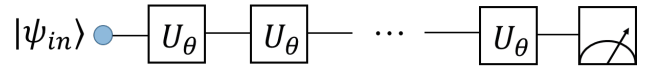


図4 Sequential Estimation の設定のイメージ

このような，ユニタリ演算子の場合には，チャンネルフィッシャー情報量を陽に計算することが比較的容易であるが，一般の TPCP 写像に対しては直接計算を行うのは困難なことが多い。このため，Metrology の分野では，チャンネルフィッシャー情報量を直接計算するのではなく，チャンネルフィッシャー情報量の上限を抑える方法が発展している。代表的なものとしては，例えば，Classical Simulation [25, 52]，Quantum Simulation [25, 52](=Channel Programmability [23])，Channel Extension [25, 50] 等が挙げられる。

#### 2.4 Sequential Strategy

前節では，エンタングルを使うことで，Probe の数  $N$  に対して，SQL を超えるスケーリング (HL) を達成できる場合があることを見た。一方で  $\Lambda_\theta$  の呼び出し回数をコストと考えた場合には，エンタングルを使わずに，Sequential に  $\Lambda_\theta$  を掛けた場合 (図4) にも同様のスケーリングを達成できる [27, 33]。

例えば，前節と同様に，既知の有効ハミルトニアン  $H$  を用いたユニタリ演算子  $U_\theta = \exp(i\theta H)$  の  $\theta$  を推定する問題 (Quantum Frequency Estimation Problem) を考える。この時， $|\psi_{in}\rangle = (|\lambda_0\rangle + |\lambda_1\rangle)/\sqrt{2}$  を初期状態として， $U_\theta$  を  $N$  回作用させた状態  $|\psi^N\rangle = (e^{iN\lambda_0\theta}|\lambda_0\rangle + e^{iN\lambda_1\theta}|\lambda_1\rangle)/\sqrt{2}$  のフィッシャー情報量は，

$$F_Q(|\psi^N\rangle\langle\psi^N|) = N^2(\lambda_1 - \lambda_0)^2 \quad (2.17)$$

であり，2.3 節で示したエンタングルを用いた方法 (Parallel Strategy) の結果 (2.16) と一致して，HL を達成する。

Sequential Strategy は，ユニタリ演算子の場合以外にも，ユニタリ演算子と可換なノイズを考えた場合には，Parallel Strategy と一致することが知られている [27, 29]。一方で，その他のノイズのある場合には，Parallel と Sequential Strategy が異なる推定精度を示す場合があり，例えば，一般には，Parallel Strategyの方がノイズ耐性があるという Conjecture がある [29]。ただし，ancilla を加えた Sequential Strategy は，Parallel Strategy を超えることも確認されており，現在精力的に研究が行われている分野の一つである [29, 31, 32] が，本稿ではこれ以上言及し

ない。

なお、後ほど見るように、QAE は、Frequency Estimation Problem の Sequential Strategy の一種と見ることが可能である。

## 2.5 Effect of Depolarizing Noise on Channel Estimation Theory

ここでは、具体的なノイズモデルとして、Depolarizing noise により、Sequential Strategy がどの程度の影響を受けるのかについて示す。2.3 節及び 2.4 節と同様に、既知の有効ハミルトニアン  $H$  を用いたユニタリ演算子  $U_\theta = \exp(i\theta H)$  の  $\theta$  を推定する問題を考えることとする。また、Depolarizing noise としては、ユニタリ変換  $U_\theta$  を行う毎に、パラメータ  $\theta$  に依存しないような pure noise がかかるようなモデルを考える；

$$\begin{aligned} \rho_\theta &= \Lambda_\theta(\rho_{in}) \\ &= pU_\theta\rho_{in}U_\theta^\dagger + (1-p)\frac{\mathbb{I}_d}{d} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここで、 $p$  はノイズの大きさを特徴づけるパラメータ ( $\theta$  とは独立なパラメータ)、 $d$  は全系の Hilbert 空間の次元、 $\mathbb{I}_d$  は  $d$  次元の単位行列である。このノイズモデルでは、ユニタリ変換  $U_\theta$  を  $n$  回作用させた後の状態は

$$\rho_{\theta,n} = p^n U_\theta^n \rho_{in} U_\theta^{\dagger n} + (1-p^n) \frac{\mathbb{I}_d}{d} \quad (2.19)$$

となる。

この時、(2.19) の状態に対して、(2.7) で定義される SLD 演算子は、

$$L_S(\rho_{\theta,n}) = \frac{2p^n}{\frac{2}{d} + (1 - \frac{2}{d})p^n} \dot{\rho}_\theta \quad (2.20)$$

で与えられる [53, 54]。ここで overdot は、パラメータ  $\theta$  に関する微分を表す。

例えばハミルトニアンが、2 つの固有状態  $|\lambda_0\rangle, |\lambda_1\rangle$  に対して、 $H = |\lambda_0\rangle\langle\lambda_0| - |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|$  と書けることとする。この時、量子フィッシャー情報量 (2.6) は、初期状態が 2 つの固有状態の等重重ね合わせ状態 (例えば、 $(|\lambda_0\rangle + |\lambda_1\rangle)/\sqrt{2}$ ) の時に以下の最大値をとる。

$$F_Q(\rho_{\theta,n}) = \frac{4n^2 p^{2n}}{\frac{2}{d} + (1 - \frac{2}{d})p^n}. \quad (2.21)$$

ユニタリ演算子  $U_\theta$  の呼び出し回数をコストと考えると、フィッシャー情報量の観点で最適な  $U_\theta$  の呼び出し回数 (1 回の呼び出しで最大のフィッシャー情報量

を得られるような回数) は  $n = -2/\ln p$  であり、その時のフィッシャー情報量の値は  $16/(e^2 \ln^2 p)$  である。

以上により、QAE の精度へのノイズの影響を解析するために必要な Quantum Metrology の基本事項を紹介した。以下では、本節により紹介した事項を用いて、Depolarizing noise 状況下における QAE の精度を評価した結果を示す。

## 3 Quantum Amplitude Estimation under Depolarizing Noise

この節では、前節で述べた Quantum Metrology の知識を活用し、QAE の Depolarize noise 状況下での性能及び既存の QAE に比べてノイズ状況下において (古典フィッシャー情報量の観点から) より高い性能を示す方法について紹介する [22]。

量子振幅推定 (QAE) の問題設定は以下のとおりである。

### Problem 1 (Quantum Amplitude Estimation)

#### Inputs:

- $X_{good} \subseteq [N = 2^n]$  という部分集合を考える。この時、以下を満たすような  $n$  ビットに作用する演算子  $A$  が存在すると仮定する。

$$A|0\rangle_n = \cos(\theta)|\psi_0\rangle_n + \sin(\theta)|\psi_1\rangle_n \quad (3.1)$$

ここで、 $\theta, |\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$  は以下を満たす

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\cos\theta} \sum_{j \notin X_{good}} \alpha_j |j\rangle \quad (3.2)$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sin\theta} \sum_{j \in X_{good}} \alpha_j |j\rangle \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in X_{good}} |\alpha_j|^2 = \sin^2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$

- 以下を満たすような  $n+1$  ビットに作用する演算子  $U_f$  が存在するとする。

$$\begin{aligned} U_f|\psi_1\rangle &= |\psi_1\rangle \\ U_f|\psi_0\rangle &= -|\psi_0\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Output:**  $\sin^2(\theta)$  の推定値

この問題設定において、特に  $A|0\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle$  の場合は Quantum Counting [55] に相当する。また、モンテカルロ法の高速度化としての

利用が期待される平均値算出 [7-10] では、 $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$  の  $n$  ビット目の値がそれぞれ 0, 1 である状態に相当する。QAE の問題設定においては、 $A$  または  $A^\dagger$  の呼び出し回数  $M$  をコストとしてカウントする。式 (3.1) の状態をそのまま観測した場合には、 $\sin^2(\theta)$  の推定誤差が  $O(1/\sqrt{M})$  程度であるのに対して、QAE アルゴリズムを使用することで、推定誤差が  $O(1/M)$  程度になることが知られている [1-7]。

QAE アルゴリズムの基本にあるものは、式 (3.1) の状態に対して、演算子

$$G = AU_0A^\dagger U_f, \quad (3.6)$$

$$U_0 = \mathbb{I}_d - 2|0\rangle_n \langle 0|_n \quad (3.7)$$

を作用することで、振幅増幅を行うということである；

$$\begin{aligned} \rho_k^G &= G^k A |0\rangle_n \\ &= \cos((2k+1)\theta) |\psi_0\rangle_n + \sin((2k+1)\theta) |\psi_1\rangle_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

式 (3.8) は、演算子  $G$  が  $|\psi_0\rangle_n$  及び  $|\psi_1\rangle_n$  で張られる部分空間における回転演算子であることを示している。すなわち、 $|\psi_0\rangle_n$  及び  $|\psi_1\rangle_n$  で張られる部分空間  $\mathcal{H}_\psi$  においては、

$$\begin{aligned} G|_{\mathcal{H}_\psi} &= \exp(-2i\theta H) \\ H &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

と表される。これは、Metrology における、Quantum Frequency Estimation Problem ( $H$  を既知の有効ハミルトニアンとした  $\theta$  の推定問題) と QAE が同じ問題であることを示唆している。Quantum Frequency Estimation Problem において、Sequential Strategy を用いて HL を達成するには入力状態として、 $H$  の固有状態の重ね合わせ状態が必要である [27]。有効ハミルトニアン  $H$  の固有状態は以下のように表される。

$$\begin{aligned} |\psi_+\rangle_n &= \frac{|\psi_0\rangle_n + i|\psi_1\rangle_n}{\sqrt{2}} \\ |\psi_-\rangle_n &= \frac{|\psi_0\rangle_n - i|\psi_1\rangle_n}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

この基底で表すと、(3.1) の状態は、2 つの固有状態の等重重ね合わせ状態であることがわかる；

$$A|0\rangle_n = \frac{e^{-i\theta} |\psi_+\rangle_n + e^{i\theta} |\psi_-\rangle_n}{\sqrt{2}} \quad (3.11)$$

$A$  の呼び出し回数を  $M = 2k + 1$  と表すと、(3.8) の量子フィッシャー情報量は、(2.8) から以下のように計算される。

$$F_Q(\rho_k^G) = 4(2k+1)^2 = 4M^2 \quad (3.12)$$

一方で、計算機基底での測定を行った場合の古典フィッシャー情報量は、

$$F_{cl}(\rho_k^G) = 4M^2 \quad (3.13)$$

と表される。古典フィッシャー情報量と量子フィッシャー情報量が一致することから、QAE において、ノイズが無い場合には、計算基底が、最も良い測定基底の一つであることを示している。以上により、QAE アルゴリズムにおける  $\theta$  の推定誤差が、 $A$  の呼び出し回数  $M$  に対して、 $O(1/M)$  と HL 程度のスケールングを示すことが、Sequential Strategy におけるチャンネルフィッシャー情報量の観点から理解することが出来る。

(3.8) とは異なる振幅増幅演算子の選び方として、以下のものが考えられる。

$$Q = U_0A^\dagger U_f A \quad (3.14)$$

この演算子  $Q$  も、ある 2 次元平面  $\mathcal{H}_\phi$  内の回転演算子であることが容易に確かめられる。 $|0\rangle_n$  はこの 2 次元空間の基底の 1 つである。 $|0\rangle_n$  に直交するもう一つの基底を、 $|\phi\rangle_n = \frac{1}{\sin 2\theta} (A^\dagger U_f A + \cos 2\theta) |0\rangle_n$  と表すとすると、この基底において  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q|_{\mathcal{H}_\phi} &= \exp(-2i\theta H) \\ \tilde{H} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

と書き表せ、初期状態  $|0\rangle_n$  に、 $Q$  を  $k$  回作用した状態は

$$\rho_k^Q = Q^k |0\rangle_n = \cos(2k\theta) |0\rangle_n + \sin(2k\theta) |\phi\rangle_n \quad (3.16)$$

となる。また、 $Q$  の 2 つの固有状態は

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle_n &= \frac{|0\rangle_n + i|\phi\rangle_n}{\sqrt{2}} \\ |\phi_-\rangle_n &= \frac{|0\rangle_n - i|\phi\rangle_n}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

であり、初期状態  $|0\rangle_n$  は、固有状態の等重重ね合わせ状態であることがわかる。この時、量子及び古典

フィッシャー情報量はそれぞれ以下のように計算される。

$$\begin{aligned} F_Q(\rho_k^Q) &= 4(2k)^2 = 4M^2 \\ F_{cl}(\rho_k^Q) &= 4M^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

これらの量は、 $G$  を用いた場合の量子及び古典フィッシャー情報量 (3.12) 及び (3.13) と、 $M$  依存性が一致している。つまり、 $A$  の呼び出し回数をコストとして数えた場合には、 $G$  を使うか  $Q$  を使うかに性能の差異は無いことになる。

次にノイズ状況下における  $G$  と  $Q$  を用いた方法の差について比較する。 $A$  を作用させる毎に以下のような Depolarization noise  $D_p$  を受けるようなノイズモデルを考える。

$$D_p(\rho) = p\rho + (1-p)\frac{\mathbb{I}_d}{d}, \quad (3.19)$$

ここで、 $\rho$  は任意の密度行列、 $p$  はノイズの強さを表す既知のパラメータ、 $\mathbb{I}_d$  は  $d$  次元の単位行列、 $d = 2^n$  は  $n$  ビット系のヒルベルト空間の次元である。

$$\begin{aligned} \rho_{k,p}^G &= (D_p G)^k(\rho_A) \\ &= p^{2k+1} G^k \rho_A (G^\dagger)^k + (1-p^{2k+1}) \frac{\mathbb{I}_d}{d} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \rho_{k,p}^Q &= (D_p Q)^k(\rho_0) \\ &= p^{2k} Q^k \rho_0 (Q^\dagger)^k + (1-p^{2k}) \frac{\mathbb{I}_d}{d} \end{aligned}$$

ここで、 $\rho_A = A|0\rangle\langle 0|A^\dagger$ 、 $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$  である。このノイズモデルの状況下において、計算機基底で測定を行った場合の古典フィッシャー情報量は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} F_{cl}(\rho_{k,p}^G) &= 4M^2 p^{2M} \sin^2(M\theta) \cos^2(M\theta) \\ &\times \frac{1}{\left(p^M \cos^2(M\theta) + \frac{|X_{good}|}{d}(1-p^M)\right)} \\ &\times \frac{1}{\left(p^M \sin^2(M\theta) + \frac{d-|X_{good}|}{d}(1-p^M)\right)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} F_{cl}(\rho_{k,p}^Q) &= 4M^2 p^{2M} \sin^2(M\theta) \cos^2(M\theta) \\ &\times \frac{1}{\left(p^M \cos^2(M\theta) + \frac{1}{d}(1-p^M)\right)} \\ &\times \frac{1}{\left(p^M \sin^2(M\theta) + \frac{d-1}{d}(1-p^M)\right)} \end{aligned}$$

ここで、 $|X_{good}|$  は集合  $X_{good}$  の元の個数である。また、 $k$  の代わりに  $A$  の呼び出し回数 ( $G$  に対しては  $M = 2k + 1$ 、 $Q$  に対しては  $M = 2k$ ) を用いた。

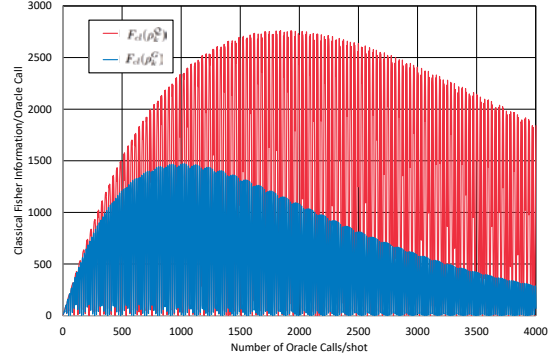


図5 式 (3.21) で定義される Depolarizing noise 状況下における古典フィッシャー情報量  $F_{\uparrow\downarrow}(\rho_{k,p}^G)$  と  $F_{\uparrow\downarrow}(\rho_{k,p}^Q)$  の比較。ここでは、推定量  $\theta = 0.1$ 、ビット数  $n = 10$ 、ノイズパラメータ  $p = 0.999$ 、集合の元の個数  $|X_{good}| = \frac{d}{2}$  とした。横軸は  $A$  の呼び出し回数、縦軸は 1 回の  $A$  の呼び出しあたりのフィッシャー情報量を示す。

量子フィッシャー情報量は、2.5 節と同様にして、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} F_q(\rho_{k,p}^G) &= \frac{4M^2 p^{2M}}{\frac{2}{d} + \left(1 - \frac{2}{d}\right) p^M} \\ F_q(\rho_{k,p}^Q) &= \frac{4M^2 p^{2M}}{\frac{2}{d} + \left(1 - \frac{2}{d}\right) p^M} \end{aligned} \quad (3.22)$$

この式から、 $G$  を用いた場合には、 $|X_{good}|$  が 0 または  $d$  に近い場合に限って、ビット数  $n$  が大きい時に古典フィッシャー情報量が量子フィッシャー情報量に近くなるのがわかる。一方で、 $Q$  を用いた場合には、 $M$  を適切に選べば、 $n$  が大きい極限で古典フィッシャー情報量と量子フィッシャー情報量を一致させることが出来る。 $|X_{good}|$  が 0 または  $d$  から十分離れていて、特にビット数  $n$  が大きい場合には  $G$  と  $Q$  の差は顕著になる (図 5 を参照)。この差異の直感的な理由としては、 $Q$  を使う場合には、基底の一つが計算機基底の一つの基底  $|0\rangle_n$  であるため、観測によりノイズと信号を識別することが可能である一方で、 $G$  の作用する基底は ( $|X_{good}|$  が 1 または  $d-1$  以外では) 複数の計算基底の重ね合わせ状態であるため、ノイズの成分が識別しにくいと考えられる。なお、(3.22) において、 $G$  と  $Q$  の量子フィッシャー情報量の  $M$  依存性が一致することは偶然ではなく、これらのフィッシャー情報量は演算子  $A$  を用いた任意の方法における最大のフィッシャー情報量を与えている [22]。



## 4 まとめ

以上のように, QAE と Quantum Metrology の Sequential Strategy が同一の問題であることを示した. この同一性を利用することにより, これまで, Quantum Metrology の Sequential Strategy において行われてきたノイズの影響に関する解析結果 (例えば [29, 40] 等) を流用できる可能性がある. また, 2 種類の振幅増幅演算子に対して, Depolarizing noise 下での振幅推定精度と関連するフィッシャー情報量を評価し, 既存の方法 ( $G$ ) に比べて提案手法 ( $Q$ ) を用いるほうが良い精度を示すことを示した.

## 引用文献

- [1] G. Brassard *et al.* Quantum amplitude amplification and estimation. *Contemporary Mathematics*, 305:53–74, 2002.
- [2] Y. Suzuki *et al.* Amplitude estimation without phase estimation. *Quantum Information Processing*, 19(2):75, 2020.
- [3] S. Aaronson and P. Rall. Quantum approximate counting, simplified. In *Symposium on Simplicity in Algorithms*, pages 24–32. SIAM, 2020.
- [4] D. Grinko *et al.* Iterative quantum amplitude estimation. arXiv preprint arXiv:1912.05559, 2019.
- [5] K. Nakaji. Faster amplitude estimation. arXiv preprint arXiv:2003.02417, 2020.
- [6] R. Venkateswaran and R. O’Donnell. Quantum approximate counting with nonadaptive grover iterations, 2020.
- [7] D. S. Abrams and C. P. Williams. Fast quantum algorithms for numerical integrals and stochastic processes. arXiv preprint quant-ph/9908083, 1999.
- [8] A. Montanaro. Quantum speedup of Monte Carlo methods. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2181):20150301, 2015.
- [9] P. Rebentrost, B. Gupt and T. R. Bromley. Quantum computational finance: Monte Carlo pricing of financial derivatives. *Physical Review A*, 98(2):022321, 2018.
- [10] S. Woerner and D. J. Egger. Quantum risk analysis. *npj Quantum Information*, 5(1):1–8, 2019.
- [11] N. Stamatopoulos *et al.* Option pricing using quantum computers. *Quantum*, 4:291, 2020.
- [12] A. Martin *et al.* Towards pricing financial derivatives with an ibm quantum computer. arXiv preprint arXiv:1904.05803, 2019.
- [13] D. J. Egger *et al.* Credit risk analysis using quantum computers. arXiv preprint arXiv:1907.03044, 2019.
- [14] K. Miyamoto and K. Shiohara. Reduction of qubits in a quantum algorithm for monte carlo simulation by a pseudo-random-number generator. *Physical Review A*, 102(2):022424, 2020.
- [15] A. Prakash. Quantum algorithms for linear algebra and machine learning. PhD thesis, UC Berkeley, 2014.
- [16] N. Wiebe, A. Kapoor and K. M. Svore. Quantum algorithms for nearest-neighbor methods for supervised and unsupervised learning. *Quantum Inf. Comput.*, 15:316–356, 2015.
- [17] N. Wiebe, A. Kapoor and K. M. Svore. Quantum deep learning. *Quantum Inf. Comput.*, 16:541–587, 2016.
- [18] N. Wiebe, A. Kapoor and K. M. Svore. Quantum perceptron models. *Proceedings of the 30th International Conference on Neural Information Processing Systems*, pages 4006–4014, 2016.
- [19] I. Kerenidis *et al.* q-means: A quantum algorithm for unsupervised machine learning. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 4134–4144, 2019.
- [20] T. Li, S. Chakrabarti and X. Wu. Sublinear quantum algorithms for training linear and kernel-based classifiers. arXiv preprint arXiv:1904.02276, 2019.
- [21] H. Miyahara, K. Aihara and W. Lechner. Quantum expectation-maximization algorithm. *Physical Review A*, 101(1):012326, 2020.
- [22] S. Uno *et al.* Modified grover operator for amplitude estimation. arXiv preprint arXiv:2010.11656, 2020.



- [23] Z. Ji *et al.* Parameter estimation of quantum channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(11):5172–5185, 2008.
- [24] B. Escher, R. de Matos Filho and L. Davidovich. General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology. *Nature Physics*, 7(5):406, 2011.
- [25] R. Demkowicz-Dobrzański, J. Kołodyński and M. Guţă. The elusive heisenberg limit in quantum-enhanced metrology. *Nature communications*, 3:1063, 2012.
- [26] V. Giovannetti, S. Lloyd and L. Maccone. Advances in quantum metrology. *Nature photonics*, 5(4):222, 2011.
- [27] L. Maccone. Intuitive reason for the usefulness of entanglement in quantum metrology. *Physical Review A*, 88(4):042109, 2013.
- [28] J. Kołodyński and R. Demkowicz-Dobrzański. Efficient tools for quantum metrology with uncorrelated noise. *New Journal of Physics*, 15(7):073043, 2013.
- [29] R. Demkowicz-Dobrzański and L. Maccone. Using entanglement against noise in quantum metrology. *Physical review letters*, 113(25):250801, 2014.
- [30] M. Jarzyna and R. Demkowicz-Dobrzański. True precision limits in quantum metrology. *New Journal of Physics*, 17(1):013010, 2015.
- [31] R. Nichols *et al.* Practical quantum metrology in noisy environments. *Physical Review A*, 94(4):042101, 2016.
- [32] Z. Huang, C. Macchiavello and L. Maccone. Noise-dependent optimal strategies for quantum metrology. *Physical Review A*, 97(3):032333, 2018.
- [33] V. Giovannetti, S. Lloyd and L. Maccone. Quantum metrology. *Physical review letters*, 96(1):010401, 2006.
- [34] M. Zwiernik, C. A. Pérez-Delgado and P. Kok. General optimality of the heisenberg limit for quantum metrology. *Physical review letters*, 105(18):180402, 2010.
- [35] T. Tanaka *et al.* Amplitude estimation via maximum likelihood on noisy quantum computer. *arXiv preprint arXiv:2006.16223*, 2020.
- [36] M. G. Paris. Quantum estimation for quantum technology. *International Journal of Quantum Information*, 7(supp01):125–137, 2009.
- [37] J. Kolodyński. Precision bounds in noisy quantum metrology. *arXiv preprint arXiv:1409.0535*, 2014.
- [38] J. F. Haase *et al.* Precision limits in quantum metrology with open quantum systems. *Quantum Measurements and Quantum Metrology*, 5(1):13–39, 2016.
- [39] G. Tóth and I. Apellaniz. Quantum metrology from a quantum information science perspective. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(42):424006, 2014.
- [40] D. Braun *et al.* Quantum-enhanced measurements without entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 90(3):035006, 2018.
- [41] J. Liu *et al.* Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(2):023001, 2019.
- [42] J. Suzuki, Y. Yang and M. Hayashi. Quantum state estimation with nuisance parameters. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020.
- [43] R. Demkowicz-Dobrzański, W. Gorecki and M. Guta. Multi-parameter estimation beyond quantum Fisher information. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020.
- [44] R. A. Fisher. Xxi. on the dominance ratio. *Proceedings of the royal society of Edinburgh*, 42:321–341, 1923.
- [45] C. Helstrom. The minimum variance of estimates in quantum signal detection. *IEEE Transactions on information theory*, 14(2):234–242, 1968.
- [46] A. S. Holevo. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2011.
- [47] S. L. Braunstein and C. M. Caves. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Physical Review Letters*, 72(22):3439, 1994.

- [48] H. Nagaoka. On Fisher information of quantum statistical models. In *Asymptotic Theory Of Quantum Statistical Inference: Selected Papers*, pages 113–124. World Scientific, 2005.
- [49] H. Nagaoka. A new approach to cramer-rao bounds for quantum state estimation. In *Asymptotic Theory Of Quantum Statistical Inference: Selected Papers*, pages 100–112. World Scientific, 2005.
- [50] A. Fujiwara and H. Imai. A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(25):255304, 2008.
- [51] A. Fujiwara. Quantum channel identification problem. In *Asymptotic theory of quantum statistical inference: selected papers*, pages 487–493. World Scientific, 2005.
- [52] K. Matsumoto. On metric of quantum channel spaces. arXiv preprint arXiv:1006.0300, 2010.
- [53] Z. Jiang. Quantum Fisher information for states in exponential form. *Physical Review A*, 89(3):032128, 2014.
- [54] Y. Yao *et al.* Multiple phase estimation for arbitrary pure states under white noise. *Physical Review A*, 90(6):062113, 2014.
- [55] G. Brassard, P. Høyer and A. Tapp. Quantum counting. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 820–831. Springer, 1998.